



TITLE:

結合チャネルの情報伝送効率に関する一考察 (情報数理に関連する応用函数解析の研究)

AUTHOR(S):

菊池, 慶一; 渡邊, 昇; 大矢, 雅則

CITATION:

菊池, 慶一 ...[et al]. 結合チャネルの情報伝送効率に関する一考察 (情報数理に関連する応用函数解析の研究). 数理解析研究所講究録 1999, 1100: 44-60

ISSUE DATE:

1999-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63162>

RIGHT:

結合チャネルの情報伝送効率に関する一考察

東京理科大学理工学部情報科学科

菊池 慶一 (Keiichi Kikuchi)

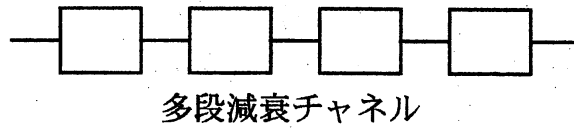
渡邊 昇 (Noboru Watanabe)

大矢 雅則 (Masanori Ohya)

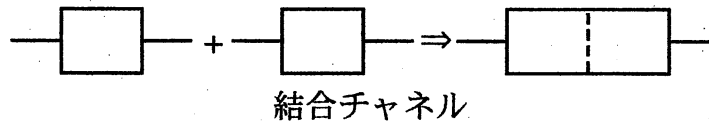
1. 序章

主に電流や電波を搬送波に用いる通信過程において、どれほど通信が効率良く行われているかを調べるためにチャネルの構造の定式化とエントロピーや相互エントロピーという尺度が導入されている。そして、これらを用いることにより、古典系の通信理論はすでに数学的に定式化されている。ところが昨今では、光を搬送波に使う新たな技術が開発され、光ファイバを通して光信号を伝達する通信系が普及し始めている。このような光信号を扱う通信過程において、情報伝送の効率を数理的に厳密に取り扱うためには量子系における通信理論（量子通信理論）の定式化が必要となる。この量子通信理論を定式化する上で重要となる量子系におけるチャネルの研究の中で特に光通信過程との関連では Ohya による減衰過程のチャネル [5] と Ohya - Watanabe による雑音のあるチャネル [13] の数理的定式化の研究が行われている。また、通信過程の情報伝送の効率を調べる上で必要不可欠である量子相互エントロピーは Ohya によって1983年に定式化されている[6]。

ところで、光ファイバなどの量子チャネルは雑音の影響を受けにくいので、真空雑音のみを考慮に入れた減衰過程のチャネル [5] などによって表されており、この減衰チャネルを複数つなげたチャネルは多段減衰チャネル [15] として記述されている。この多段減衰チャネルは、一つ一つの減衰チャネルを横に並べたものであり、矩形が個々のチャネルに対応した物理的な装置を表すとすると下図のような数珠繋ぎのイメージである。



文献[4]で新たに導入された結合チャネルは、次のような考えに則って定義したチャネルである。今、二つのチャネルに対応した物理的な装置を結合させて一つの物理的装置を作ることができたとする（下図参照）。



このようにして作られるチャネルを結合チャネルと呼ぶことにする。このように、多段減衰チャネルと結合チャネルでは、その構造が大きく異なっている。本論文では、このチャネルの構造の違いによって、情報伝送効率がどのように異なってくるのかを厳密に調べるということが主な目的である。多段減衰チャネルと結合チャネルそれぞれに対して、コヒーレント状態を用いた三つの光変調方式（OOK (On Off Keying), PPM(Pulse Position Modulation), PWM(Pulse Width Modulation)）による情報伝送の効率の比較を MMER (Maximum Mutual entropy - Entropy Ratio) という新たな尺度を用いて調べた。

2. 結合チャネル

この章では、雑音と損失を考慮した量子系のチャネルを簡潔に復習し、多段減衰チャネルと結合チャネルの構成法について説明する。

今、入力系と出力系の Hilbert 空間をそれぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ とし、 \mathcal{H}_1 上の有界線形作用素の全体を $B(\mathcal{H}_1)$ で表す。そして \mathcal{H}_1 上の量子状態を表す密度作用素の全体を $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ で表す。また、雑音系と損失系の Hilbert 空間をそれぞれ $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ とし、上記と同様に \mathcal{K}_1 上の有界線形作用素の全体と密度作用素の全体をそれぞれ $B(\mathcal{K}_1), \mathcal{S}(\mathcal{K}_1)$ で表す。

さて、量子系のチャネル Λ^* は入力状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ を出力状態 $\Lambda^* \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ へ写す変換として次のように定義されている [3, 5, 6, 7]。

[定義 2.1] Λ を $B(\mathcal{H}_2)$ から $B(\mathcal{H}_1)$ への線形写像とし, Λ^* を Λ の共役写像とする (ここで Λ^* が Λ の共役写像であるとは, 任意の $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ と任意の $Q \in B(\mathcal{H}_2)$ に対して

$$\mathrm{tr} \Lambda(Q) \rho = \mathrm{tr} \Lambda^*(\rho) Q$$

を満たすことを言う). この Λ が完全正写像であるとき, その共役写像 Λ^* を量子系のチャネルと呼ぶ. (ここで, Λ が完全正写像であるとは任意の $P_i \in B(\mathcal{H}_1)$ と任意の $Q_j \in B(\mathcal{H}_2)$ に対して

$$\left\langle x, \sum_{i,j} Q_j^* \Lambda(P_i^* P_j) Q_j x \right\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1$$

を満たすことを言う.)

今, $\xi \in \mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$ を雑音状態とすると, 雑音と損失を考慮した量子系のチャネルは, 任意の入力状態 ρ に対して, 次式のように構成されている[5, 6]

$$\Lambda^*(\rho) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}_2} \pi^*(\rho \otimes \xi).$$

ここで, π^* は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から, $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ へのある種の因果性を満たす量子系のチャネルであり, チャネルの物理的な性質によって決まるものである. $\Phi_m^{(1)}$, $\Psi_k^{(1)}$ をそれぞれ m 光子数確定状態ベクトル $\Phi_m^{(1)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ と k 光子数確定状態ベクトル $\Psi_k^{(1)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$ とする. 特に減衰過程の雑音は真空状態 $\xi = |\Psi_0^{(1)}\rangle\langle\Psi_0^{(1)}| \in \mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$ によって表される ($\Psi_0^{(1)}$ は \mathcal{K}_1 の真空状態ベクトル). また, この減衰過程において π^* は

$$\pi^*(\cdot) = V_0(\cdot) V_0^* \equiv \Pi_0^*(\cdot),$$

で与えられている. ここで V_0 は

$$V_0(\Phi_n^{(1)} \otimes \Psi_0^{(1)}) = \sum_{j=0}^n C_j^n \Phi_j^{(2)} \otimes \Psi_{n-j}^{(2)}$$

であり,

$$C_j^n = \sqrt{\frac{n!}{j!(n-j)!}} \eta^j (1-\eta)^{n-j}$$

である (η は, チャネルの透過率). 以上のことから任意の入力状態 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ に対する減衰チャネル Λ_0^* が次のように定義されている[5].

$$\Lambda_0^*(\rho) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}_2} V_0(\rho \otimes \xi) V_0^*$$

また、任意の入力状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_I)$ に対する多段減衰チャネルは、次のように与えられている[14].

$$\Lambda_0^{*L}(\rho) \equiv \Lambda_0^*(\Lambda_0^*(\cdots \Lambda_0^*(\rho) \cdots))$$

ここで、透過率 η を持つ減衰チャネルを $\Lambda_{0,\eta}^*$ と表すと次の定理が成り立つ.

[定理 2.2] コヒーレント入力状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_I)$ に対して

$$\Lambda_{0,\eta}^{*L}(\rho) = \Lambda_{0,\eta^L}^*(\rho)$$

が成り立つ.

この定理より透過率 η を持つ同一の減衰チャネルを L 個つないで作られる多段減衰チャネルは、透過率 η^L を持つ一つの減衰チャネルとして表すことができる.

ところで、この多段減衰チャネルの一つ一つのチャネル Λ_0^* の構成は、雑音と損失（観測）という外部系とのやり取りを考慮しており、多段減衰チャネル Λ_0^{*L} は、個別の物理的なチャネル Λ_0^* をいくつも繋げたもの（細切れの物理的なチャネル）というイメージがある.

本論文では通信系の物理的装置に対応するチャネル Π^* を L 個結合することによって、作られる次のような結合チャネルを新たに数学的に定義する. :

$$\begin{aligned} \Lambda_L^*(\rho) &= a^* \circ \Pi^* \circ \cdots \circ \Pi^* \circ \Pi^* \circ \gamma^*(\rho) \\ &= \text{tr}_K V(V \cdots V(V(\rho \otimes \xi)V^*)V^* \cdots V^*)V^* \end{aligned}$$

ここで、 V は文献[16]で導入され、雑音のある量子チャネルの定式化に用いられている.

$$V(\Phi_{n_1}^{(1)} \otimes \Psi_{n_2}^{(1)}) = \sum_{j=0}^{n_1+n_2} C_j^{n_1, n_2} \Phi_j^{(2)} \otimes \Psi_{n_1+n_2-j}^{(2)}$$

ここで、

$$C_j^{n_1, n_2} = \sum_{r=R}^K (-1)^{n_1-r} \frac{\sqrt{n_1! n_2! j! (n_1 + n_2 - j)!}}{r! (n_1 - r)! (j - r)! (n_2 - j + r)!} \sqrt{\eta^{n_2-j+2r} (1-\eta)^{n_1+j-2r}}$$

であり、 $K = \min\{j, n_1\}$, $R = \max\{j - n_2, 0\}$ である. この結合チャネルは、チャネル Π^* を透過率 η を持ち、ある定まった長さ l の物理的な装置（チャネル）の内部の信号伝送過程を表すものと捉えることによって、 Π^* の L 個の結合 Π^{*L} は長さが $l \times L$ の物理的なチャネルの内部の信号伝送過程を表していると考えることができ

る。ここで、 Π^{*L} は、外部系とのやり取りを一切せずに、信号を伝送すると考えることができるので、結合チャネルは $1 \times L$ の長さの一つながりの物理的なチャネルというイメージを持つと考えられる。本論文では、簡単のため損失をそのまま次のチャネル Π^* の雑音とする数学的な結合チャネルのモデルについて考えてみることにした。

3. 最大相互エントロピー比 (MMER)

この章では、量子系の入力状態とチャネルに関する相互エントロピーについて簡潔に復習し、情報伝送の効率を測るためのいくつかの尺度について説明する。

密度作用素で表現されている状態 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_k)$ (ここで、 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_k)$ は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_k) \equiv \{\rho \in B(\mathcal{H}_k); \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \text{tr } \rho = 1\}$) に対する von Neumann エントロピー [20] は次のように定義されている。

$$S(\rho) = -\text{tr } \rho \log \rho$$

このエントロピーは、量子状態 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_k)$ の持つ情報の量を表すものである。さらに、Ohya は文献 [6] において、 ρ と $\Lambda^* \rho$ の間の相関を表す合成状態を使うことにより、量子系の相互エントロピーを以下で示すように定義した：

今、 ρ の Shatten 分解を

$$\rho = \sum_n \lambda_n E_n$$

とする [18]。ここで $\{\lambda_n\}$ は入力状態 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_k)$ の固有値であり、 E_n は固有値 λ_n に対応する固有ベクトル x_n により生成される \mathcal{H}_k の一次元部分空間への射影作用素である。但し、この分解が一意となるのは ρ の全ての固有値 $\{\lambda_n\}$ が縮退していないときに限る。このとき、合成状態 σ_E は次のように与えられる [6]。

$$\sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n$$

量子入力状態 ρ と量子系のチャネル Λ^* に関する量子相互エントロピーは、次の条件を満たさなければならない：

- (1) チャネル Λ^* が恒等変換 id であれば、相互エントロピーは von Neumann エントロピーに一致する。すなわち、 $I(\rho; id) = S(\rho)$ 。

(2) 系が古典系であれば、量子相互エントロピーは古典系の相互エントロピーに一致する。

(3) 基本不等式 $0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq 1$ を満たす。

この三つの条件を満たすものとして、量子入力状態 ρ と量子系のチャネル Λ^* に関する Ohya 相互エントロピーは

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup_E \{S(\sigma_E | \sigma_0); E = \{E_n\}\}$$

で定められている[1, 6, 10]. ここで, $\sigma_0 = \rho \otimes \Lambda^* \rho$ であり, $S(\sigma_E | \sigma_0)$ は

$$S(\sigma_E | \sigma_0) \equiv \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0)$$

で与えられる相対エントロピーである[19]. この Ohya 相互エントロピーは入力状態 ρ の有する情報のどれほどが出力状態に正しく伝えられたかを表す量である. 更に, この Ohya 相互エントロピーは次の不等式を満たす.

[定理 3.1] Shannon-Ohya の基本不等式

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min\{S(\rho), S(\Lambda^* \rho)\}$$

が成り立つ[6].

さて, 古典系の場合と同様に量子系の相互エントロピーは量子系の情報伝送を議論する上で重要な役割を果たす. 前節で述べたように量子入力状態 ρ と量子チャネル Λ^* に関する相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は入力状態の持つ情報量のうちチャネル Λ^* を通して出力系に正しく伝達された情報の量を表し

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq S(\rho),$$

を満たしているので, $I(\rho; \Lambda^*)$ が大きければ大きいほどチャネル Λ^* の情報伝送効率が良いと考えられる. この相互エントロピーを用いて, 入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する相互エントロピー比 (MER (Mutual entropy - Entropy Ratio)) $r(\rho; \Lambda^*)$ は

$$0 \leq r(\rho; \Lambda^*) = \frac{I(\rho; \Lambda^*)}{S(\rho)} \leq 1,$$

で定められる[17]. つまり, この MER は入力の情報量の何割が出力系に正しく伝

えることができるかを測る尺度である。例えば、チャネル Λ^* を固定すると、この MER を使って量子系において様々な光変調方式などを用いたときの情報伝送の効率を比較することができるのである。また入力系が異なる、つまり入力のエントロピー $S(\rho)$ が異なるときもチャネルの情報伝送効率を同一の視点で比較することができる。

一般に情報伝送の効率を測る尺度として量子通信路容量(キャパシティー)

$$C_q^{\mathcal{S}}(\Lambda^*) = \sup\{I(\rho; \Lambda^*); \rho \in \mathcal{S}\}$$

を用いた研究がなされている[8, 11, 12, 17]。ここで、 $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$ はある条件(例えば、入力の状態 ρ の平均エネルギー $E(\rho)$ に関する制約: $\mathcal{S}_e = \{\rho \in \mathcal{S}; E(\rho) < e\}$) を満たす集合である。この量子通信路容量は上式からも分かるようにチャネルが入力の情報量を最大でどれだけ正確に出力系に伝達することができるかを測るための尺度となっている。しかし、相互エントロピーの場合と同様に入力系が異なる場合(例えば、古典系と量子系など) 正確にはチャネル自体の性能比較をすることができない。そこで、このように系の異なる場合においてもチャネル自体の効率を比較する尺度として MMER を次のように定義した。

[定義 3.2] 入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する最大相互エントロピー比 (MMER (Maximum Mutual entropy - Entropy Ratio)) $R_\rho(\Lambda^*)$ は

$$0 \leq R_\rho(\Lambda^*) \equiv \sup\left\{\frac{I(\rho; \Lambda^*)}{S(\rho)}; \rho \in \mathcal{S}\right\} \leq 1$$

で表される[4]。ここで、 $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$ は量子通信路容量の場合と同じくある条件を満たす集合である。

4. 光変調方式

この章では、光通信に用いられる光変調方式について述べる。光変調方式とは、搬送波として光を用いる変調方式[2]であるが、特に5章の計算で用いる変調方式について、どのように入力信号が光変調されるかを簡単に述べる。

入力信号を異なる N 個の要素からなる集合 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ とする. 入力系から発信される一文字の長さのメッセージの列を $\{x(i); i \in \mathbf{Z}\}$ とする. いま, 入力の量子系のヒルベルト空間を \mathcal{H} とし, 光変調された量子系のヒルベルト空間を \mathcal{H}_M で表す. 各入力信号 x_n は入力状態 $F_n \in \text{ex}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ に量子符号化され, さらに, 入力状態 F_n は光変調 M によって光の量子状態 $F_n^{(M)} \in \text{ex}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ に変換されるものとする. また, 任意の直交する入力状態に対して光変調された量子状態がすべて直交する場合を理想的な光変調という. 以下に, 5章の計算で用いる光変調方式(OOK方式, PPM方式, PWM方式)を取り上げる. また, 次の定理を用いて三つの変調方式に対応する入力状態を定めることにする.

[定理 4.1] 任意の非直交ベクトルの組 $x, y \in \mathcal{H}$ によって与えられた状態 ρ

$$\rho = \lambda |x\rangle\langle x| + (1-\lambda) |y\rangle\langle y| \quad (\forall \lambda \in [0, 1])$$

の von Neumann - Schatten 分解は一意である[21].

1) OOK(On Off Keying)方式

入力信号の値に対応してパルス列の振幅(エネルギー)の有無を, 例えば 0(OFF), 1(ON)に対応させ情報をのせるという方式である. このOOK方式で変調した入力状態の集合 \mathcal{S}_{OOK} を次のように定める.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{OOK}} \equiv & \left\{ \rho_{\text{OOK}} = \lambda F_{\text{OOK}}^{(0)} + (1-\lambda) F_{\text{OOK}}^{(1)} \mid \forall \lambda \in [0, 1], \forall \theta \in \mathbf{C} \right\} \\ & F_{\text{OOK}}^{(0)} = |0\rangle\langle 0|, F_{\text{OOK}}^{(1)} = |\theta\rangle\langle \theta| \in \text{ex}\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

但し, $|0\rangle$ は真空状態ベクトル, $|\theta\rangle$ はコヒーレント状態ベクトル, λ は信号 0 の先験確率である(他の変調方式でも同様).

2) PPM(Pulse Position Modulation)方式

入力信号の値に対応する位置のパルスを発生させ, その入力信号を表現する方式である. PPM方式(2値PPM方式)で変調した入力状態の集合 \mathcal{S}_{PPM} を次のように定める.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{PPM}} \equiv & \left\{ \rho_{\text{PPM}} = \lambda F_{\text{PPM}}^{(0)} + (1-\lambda) F_{\text{PPM}}^{(1)} \mid \forall \lambda \in [0, 1], \forall \theta \in \mathbf{C} \right\} \\ & F_{\text{PPM}}^{(0)} = |\theta\rangle\langle \theta| \otimes |0\rangle\langle 0|, F_{\text{PPM}}^{(1)} = |0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle \theta| \in \text{ex}\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

3) PWM(Pulth Width Modulation)方式

入力信号に対応する値だけ、右側若しくは左側からパルスを発生させ、その入力信号を表現する方式である。PWM方式(2値PWM方式)で変調した入力状態の集合 \mathcal{S}_{PWM} を次のように定める。

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{PWM}} &\equiv \{\rho_{\text{PWM}} = \lambda F_{\text{PWM}}^{(0)} + (1-\lambda)F_{\text{PWM}}^{(1)} \mid \forall \lambda \in [0,1], \forall \theta \in \mathbb{C}\} \\ F_{\text{PWM}}^{(0)} &= |0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle \theta|, F_{\text{PWM}}^{(1)} = |\theta\rangle\langle \theta| \otimes |\theta\rangle\langle \theta| \in \text{ex}\mathfrak{S}(\mathcal{H})\end{aligned}$$

5. 数値計算

この章では、4章で定めた入力状態を用いて各変調方式による相互エントロピーを文献[11,15,21]に従って求め、その相互エントロピーを用いて定義されるMMERによって各変調方式における伝送効率の比較を行う。4章で示した三つの変調方式を M とし、チャンネルを Λ^* としたとき、文献[11,15,21]から Ohya 相互エントロピーは

$$I(\rho_M; \Lambda^*) = S(\Lambda^* \rho_M) - \|\rho_M\| S(\Lambda^* \bar{F}_0) - (1 - \|\rho_M\|) S(\Lambda^* \bar{F}_1)$$

により計算することができる。ここで、 $j=0,1$ に対して

$$\|\rho_M\| = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta|^2))} \right\}$$

$$S(\Lambda^* \rho_M) = -\sum_{i=0}^1 v_i \log v_i, \quad S(\Lambda^* \bar{F}_j) = -\sum_{i=1}^1 \bar{\mu}_{ji} \log \bar{\mu}_{ji}$$

であり、各パラメータは以下のように定められている。

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{j0} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\bar{\lambda}_j(1-\bar{\lambda}_j) \left(1 - \left| \langle \bar{x}_{j0}, \bar{x}_{j1} \rangle \right|^2 \right)} \right\} \\ \bar{\mu}_{j1} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\bar{\lambda}_j(1-\bar{\lambda}_j) \left(1 - \left| \langle \bar{x}_{j0}, \bar{x}_{j1} \rangle \right|^2 \right)} \right\} \\ \langle \bar{x}_{j0} | \bar{x}_{j1} \rangle &= \frac{\tau_j^2 - 1}{\sqrt{(\tau_j^2 + 1)^2 - 4 \exp\left(-\frac{1}{2} |\theta_{\eta(L)}|^2\right) \tau_j^2}} \neq 0 \quad (j=0,1) \\ \bar{\lambda}_j &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} |\theta|^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2} |\theta_{\eta(L)}|^2\right)} \right) \cdot \frac{\tau_j^2 + 2 \exp\left(-\frac{1}{2} |\theta_{\eta(L)}|^2\right) \tau_j + 1}{\tau_j^2 + 2 \exp\left(-\frac{1}{2} |\theta|^2\right) \tau_j + 1} \quad (j=0,1)\end{aligned}$$

$$v_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda) \left(1 - \exp(-|\theta_{\eta(L)}|^2) \right)} \right\}, v_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda) \left(1 - \exp(-|\theta_{\eta(L)}|^2) \right)} \right\}$$

$$\tau_0 = \frac{-(1-2\lambda) + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda) \left(1 - \exp(-|\theta|^2) \right)}}{2(1-\lambda) \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)}, \quad \tau_1 = -\frac{1 + \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \tau_0}{\tau_0 + \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)}$$

但し、多段減衰チャネルの場合 $\Lambda^* = \Lambda_0^{*L}$, $\theta_{\eta(L)} = (\sqrt{\eta})^L \theta$ であり、結合チャネルの場合 $\Lambda^* = \Lambda_L^*$, $\theta_{\eta(L)} = \sum_{j=0}^{[L/2]} C_{2j}(-1)^j (\sqrt{\eta})^{L-2j} (1-\eta)^j \theta$ である。

ここで一つの新しい概念について説明する。それは、入力状態のエネルギー期待値（平均エネルギー、送信平均光子数）と呼ばれるものである。これは、文字どおり入力状態には平均でどれだけのエネルギーが使われているかを示す値である。このエネルギー期待値を4章で述べた各変調方式に対して求め、今回の計算で実際に用いる MMER を各入力状態に対して定義し、計算結果をグラフに表してみる。

(1) OOK方式

4章で定めた入力状態より、エネルギー期待値 $E(\rho_{\text{OOK}})$ は

$$E(\rho_{\text{OOK}}) = \lambda \times 0 + (1-\lambda) \times |\theta|^2 = (1-\lambda)|\theta|^2$$

と計算することができる。このとき、多段減衰チャネルの MMER は

$$0 \leq R_{\text{OOK}}^E(\Lambda_0^{*L}) \equiv \sup_{\lambda} \left\{ \frac{I(\rho_{\text{OOK}}; \Lambda_0^{*L})}{S(\rho_{\text{OOK}})}; E = E(\rho_{\text{OOK}}), \forall \rho_{\text{OOK}} \in \mathcal{S}_{\text{OOK}} \right\} \leq 1$$

と定義でき、結合チャネルの MMER は

$$0 \leq R_{\text{OOK}}^E(\Lambda_L^*) \equiv \sup_{\lambda} \left\{ \frac{I(\rho_{\text{OOK}}; \Lambda_L^*)}{S(\rho_{\text{OOK}})}; E = E(\rho_{\text{OOK}}), \forall \rho_{\text{OOK}} \in \mathcal{S}_{\text{OOK}} \right\} \leq 1$$

と定義することができる。但し、

$$\mathcal{S}_{\text{OOK}} \equiv \{ \rho_{\text{OOK}} = \lambda F_{\text{OOK}}^{(0)} + (1-\lambda) F_{\text{OOK}}^{(1)} \mid \forall \lambda \in [0,1], \forall \theta \in \mathbb{C} \}$$

$$F_{\text{OOK}}^{(0)} = |0\rangle\langle 0|, F_{\text{OOK}}^{(1)} = |\theta\rangle\langle \theta| \in \text{ex}\mathcal{S}(\mathcal{H})$$

である。 $E \in [0,3], \lambda \in [0,1]$ のもとで $R_{\text{OOK}}^E(\Lambda_0^{*L}), R_{\text{OOK}}^E(\Lambda_L^*)$ をそれぞれ $\eta = 0.8, 0.9, 0.99$ の場合について計算した結果をグラフに表したものが図1、図4である。

(2) PPM方式

4章で定めた入力状態より, エネルギー期待値 $E(\rho_{\text{PPM}})$ は

$$E(\rho_{\text{PPM}}) = \lambda \times |\theta|^2 + (1-\lambda) \times |\theta|^2 = |\theta|^2$$

と計算することができる. このとき, 多段減衰チャネルの MMER は

$$0 \leq R_{\text{PPM}}^E(\Lambda_0^{*L}) \equiv \sup_{\lambda} \left\{ \frac{I(\rho_{\text{PPM}}; \Lambda_0^{*L})}{S(\rho_{\text{PPM}})}; E = E(\rho_{\text{PPM}}), \forall \rho_{\text{PPM}} \in \mathcal{S}_{\text{PPM}} \right\} \leq 1$$

と定義でき, 結合チャネルの MMER は

$$0 \leq R_{\text{PPM}}^E(\Lambda_L^*) \equiv \sup_{\lambda} \left\{ \frac{I(\rho_{\text{PPM}}; \Lambda_L^*)}{S(\rho_{\text{PPM}})}; E = E(\rho_{\text{PPM}}), \forall \rho_{\text{PPM}} \in \mathcal{S}_{\text{PPM}} \right\} \leq 1$$

と定義することができる. 但し,

$$\mathcal{S}_{\text{PPM}} \equiv \{ \rho_{\text{PPM}} = \lambda F_{\text{PPM}}^{(0)} + (1-\lambda) F_{\text{PPM}}^{(1)} \mid \forall \lambda \in [0,1], \forall \theta \in \mathbb{C} \}$$

$$F_{\text{PPM}}^{(0)} = |\theta\rangle\langle\theta| \otimes |0\rangle\langle 0|, F_{\text{PPM}}^{(1)} = |0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle\theta| \in \text{ex}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$$

である. $E \in [0,3], \lambda \in [0,1]$ のもとで $R_{\text{PPM}}^E(\Lambda_0^{*L}), R_{\text{PPM}}^E(\Lambda_L^*)$ をそれぞれ $\eta = 0.8, 0.9, 0.99$ の場合について計算した結果をグラフに表したものが図 2, 図 5 である.

(2) PWM方式

4章で定めた入力状態より, エネルギー期待値 $E(\rho_{\text{PWM}})$ は

$$E(\rho_{\text{PWM}}) = \lambda \times |\theta|^2 + (1-\lambda) \times 2|\theta|^2 = (2-\lambda)|\theta|^2$$

と計算することができる. このとき, 多段減衰チャネルの MMER は

$$0 \leq R_{\text{PWM}}^E(\Lambda_0^{*L}) \equiv \sup_{\lambda} \left\{ \frac{I(\rho_{\text{PWM}}; \Lambda_0^{*L})}{S(\rho_{\text{PWM}})}; E = E(\rho_{\text{PWM}}), \forall \rho_{\text{PWM}} \in \mathcal{S}_{\text{PWM}} \right\} \leq 1$$

と定義でき, 結合チャネルの MMER は

$$0 \leq R_{\text{PWM}}^E(\Lambda_L^*) \equiv \sup_{\lambda} \left\{ \frac{I(\rho_{\text{PWM}}; \Lambda_L^*)}{S(\rho_{\text{PWM}})}; E = E(\rho_{\text{PWM}}), \forall \rho_{\text{PWM}} \in \mathcal{S}_{\text{PWM}} \right\} \leq 1$$

と定義することができる. 但し,

$$\mathcal{S}_{\text{PWM}} \equiv \{ \rho_{\text{PWM}} = \lambda F_{\text{PWM}}^{(0)} + (1-\lambda) F_{\text{PWM}}^{(1)} \mid \forall \lambda \in [0,1], \forall \theta \in \mathbb{C} \}$$

$$F_{\text{PWM}}^{(0)} = |0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle\theta|, F_{\text{PWM}}^{(1)} = |\theta\rangle\langle\theta| \otimes |\theta\rangle\langle\theta| \in \text{ex}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$$

である. $E \in [0, 3], \lambda \in [0, 1]$ のもとで $R_{\text{PWM}}^E(\Lambda_0^{*L}), R_{\text{PWM}}^E(\Lambda_L^*)$ をそれぞれ $\eta = 0.8, 0.9, 0.99$ の場合について計算した結果をグラフに表したものが図 3, 図 6 である.

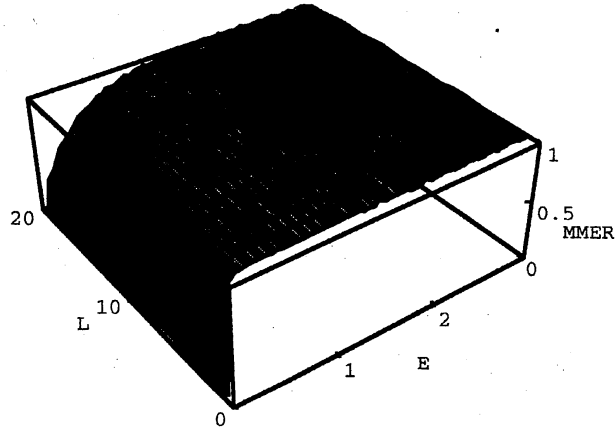


図 1 OOK方式のMMER (多段減衰チャネル: $\eta = 0.9$)

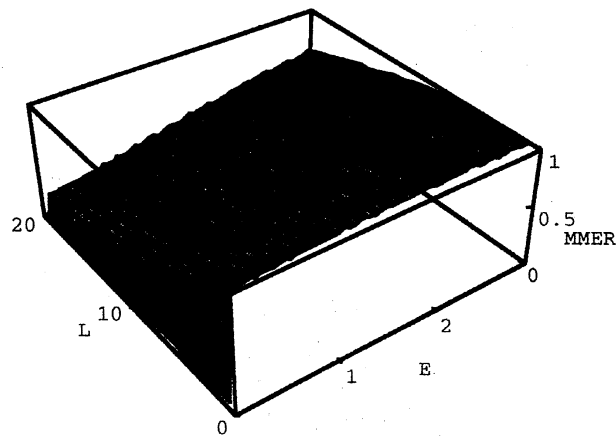


図 2 PPM方式のMMER (多段減衰チャネル: $\eta = 0.9$)

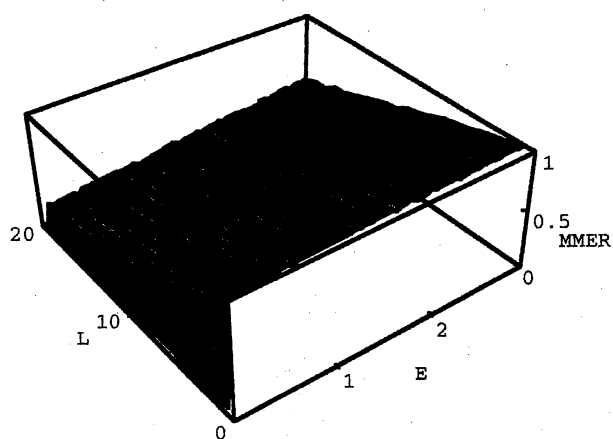


図3 PWM方式のMMER (多段減衰チャネル: $\eta = 0.9$)

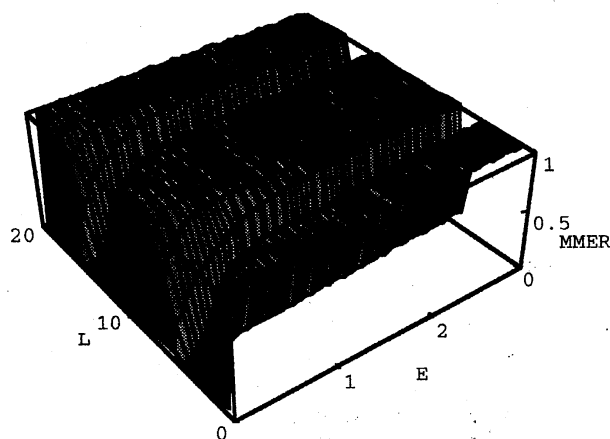


図4 OOK方式のMMER (結合チャネル: $\eta = 0.9$)

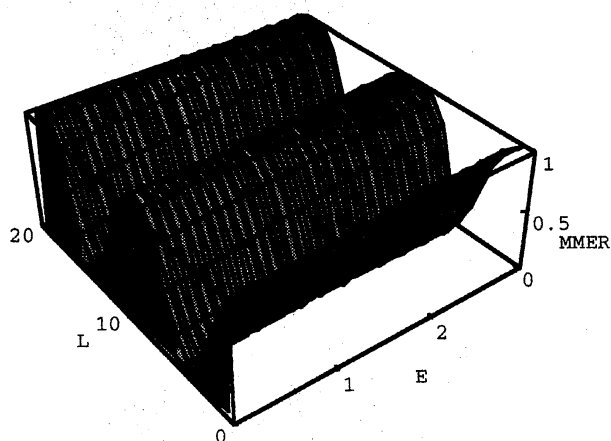


図5 PPM方式のMMER (結合チャネル: $\eta = 0.9$)

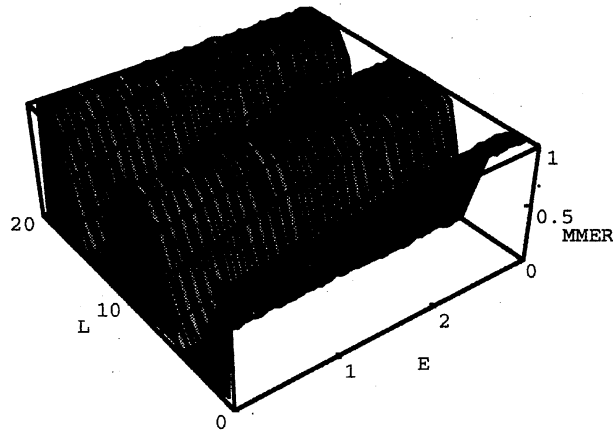


図6 PWM方式のMMER (結合チャネル: $\eta = 0.9$)

(1), (2), (3) の計算によって導き出されたグラフ (図1 ~ 図6) を比較検討することにより次に示すいくつかのことが分かるが, ここでは多段減衰チャネルと結合チャネルのそれぞれの場合について分けて列挙してみた.

[多段減衰チャネル]

- (i) チャネル数 L を固定したとき, 三つの変調方式におけるMMER $R_M^E(\Lambda_0^{*L})$ (M は変調方式を表す. 以下同じ) はエネルギー期待値 E が増えるに従って増加している.
- (ii) エネルギー期待値 E を固定したとき, 三つの変調方式におけるMMER $R_M^E(\Lambda_0^{*L})$ はチャネル数 L が増えるに従って減少している.
- (iii) チャネル数 L を固定したとき, 三つの変調方式を比較するとMMERに関して以下の不等式が成り立つ.

$$R_{\text{PWM}}^E(\Lambda_0^{*L}) \leq R_{\text{PPM}}^E(\Lambda_0^{*L}) \leq R_{\text{OOK}}^E(\Lambda_0^{*L})$$

- (iv) エネルギー期待値 E を固定したとき, 三つの変調方式を比較するとMMERに関して以下の不等式が成り立つ.

$$R_{\text{PWM}}^E(\Lambda_0^{*L}) \leq R_{\text{PPM}}^E(\Lambda_0^{*L}) \leq R_{\text{OOK}}^E(\Lambda_0^{*L})$$

[結合チャネル]

- (i) エネルギー期待値 E を固定したとき、三つの変調方式を比較するとMMERに関して以下の不等式が成り立つ.

$$R_{\text{PWM}}^E(\Lambda_L^*) \leq R_{\text{PPM}}^E(\Lambda_L^*) \leq R_{\text{OOK}}^E(\Lambda_L^*)$$

- (ii) 三つの変調方式に対して次のことが成り立つ.

$$\exists k \quad s.t. \quad R_M^E(\Lambda_1^*) \leq R_M^E(\Lambda_k^*)$$

$$\exists k \quad s.t. \quad R_M^E(\Lambda_0^{*k}) \leq R_M^E(\Lambda_k^*)$$

また、この結合チャネルではMMERが L に対して振動しているが、これはチャネルの定義の仕方、つまり Π^* と Π^* との結合の仕方に関連しているものと推測される。入力と雑音がチャネル Π^* を通る度に出力と損失になるが、次のチャネル Π^* には出力をそのまま入力に、そして損失を雑音として入力するという性質から実際は損失として失われた情報が、あるところで（ある周期で）再び元の入力の情報として付け加えられるため振動を起こしているものと考えられる。実際、 $\eta=0.9$ の場合 $L=5$ 回程度で、入力状態と雑音状態 $\rho \otimes \xi$ は $\rho' \otimes \xi'$ に変換されるので入力状態と雑音状態が5回程度で入れ替わることが計算によって求められる。このことは $L=5$ 回で、入力状態の情報が出力状態に全く伝達されなくなることを意味する。また、雑音状態と入力状態を $L=5$ 回で交換したということは、さらに $L=5$ 回変換を行うことによって元の入力状態と雑音状態に近い状態に戻ることが分かる。従って、 $\eta=0.9$ の場合 $L=10$ 回の周期でMMERが振動するものと考えられる。

6. まとめ

本論文で導入した結合チャネルと、以前より研究されていた多段減衰チャネルの比較とそれぞれのチャネルにおける光変調方式の情報伝送効率の計算を行ったが、今回の研究で以下のことが分かった。

- i) 結合チャネルのMMERの値はチャネルをいかに構成するかによって、同条件（ L が等しい場合）の多段減衰チャネルに比べて高くすることができるので、物理的に結合チャネルを実現することができれば光ファイバチャネルの伝送効率の改善ができるものと思われる。
- ii) なお、MMERで調べると結合チャネルに対して最も情報伝送の効率が良い光変

調方式はOOKであることがわかった。

結合チャネルの数学的な定義は、理想的なチャネルのモデルであると考えられるが、少なくとも多段減衰チャネルよりも伝送効率の高い減衰過程が数学的に存在するといえるであろう。また、結合チャネルの定義は Π^* をいくつか結合したものであるが、この Π^* はユニタリ変換であり近年盛んに研究が行われている量子コンピュータ[9]の内部で行われている計算の1ステップに対応させることができるので、量子計算の記述にこの研究結果を応用することができるものと思われる。

参考文献

- [1] V.P.Belavkin and M.Ohya, "Quantum entanglements and entangled mutual entropy", to be published.
- [2] F. R. Connor, "Modulation", Edward Arnold Publishers Ltd, 1973.
- [3] R.S.Ingarden, A.Kossakowski and M.Ohya, "Information Dynamics and Open Systems", Kluwer, 1997.
- [4] 菊池慶一, 渡邊昇, 大矢雅則: "結合チャネルの情報伝送効率について", 信学論(A), J81-A, 12, pp.1707-1714, 1998.
- [5] M. Ohya, "Quantum ergodic channels in operator algebras", J. Math. Anal. Appl. 84, pp. 318-328, 1981.
- [6] M. Ohya, "On compound state and mutual information in quantum information theory", IEEE Information Theory, 29, pp.770-774, 1983.
- [7] M. Ohya, "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes", Rep. Math. Phys., 27, pp.19-47, 1989.
- [8] 大矢雅則: "量子チャネルの伝送容量について", 信学論(A), J81-A, 12, pp.1638-1643, 1998.
- [9] 大矢雅則: "量子コンピュータの数理", 丸善, 1999.
- [10] M. Ohya and D. Petz, "Quantum Entropy and Its Use", Springer-Verlag(TMP-series), 1993.
- [11] M. Ohya, D. Petz and N. Watanabe, "On capacities of quantum channels", Probability and Mathematical Statistics, 17, pp.179-196, 1997.
- [12] M. Ohya, D. Petz and N. Watanabe, "Numerical Computation of Quantum Capacity", International Journal of Theoretical Physics, 37, No.1, pp.507-510, 1998.
- [13] 大矢雅則, 渡邊昇: "量子論的通信過程における数理モデルの構成とその解析", 信学論(A), J 67-A, 6, pp.548-552, 1984.
- [14] M. Ohya and N. Watanabe, "Efficiency of modulations in an optical communication

- process", Proc. International Conf. Opt. Commun. Theory, pp.40-43, 1987.
- [15] M. Ohya and N. Watanabe, "A mathematical study of information transmission in quantum communication processes", Quantum Communications and Measurement, 2, pp. 371-378, 1996.
- [16] M. Ohya and N. Watanabe, "On mathematical treatment of the Fredkin - Toffoli - Milburn gate", Physica D, 120, pp.206-213, 1998.
- [17] 大矢雅則, 渡邊昇: "量子通信理論の基礎 - 量子情報から光通信へ-", 牧野書店, 1998.
- [18] R. Schatten, "Norm Ideals of Completely Continuous Operators", Springer-Verlag, 1970.
- [19] 梅垣壽春, 大矢雅則: "量子論的エントロピー", 共立出版, 1984.
- [20] J. von Neumann, "Die Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik", Springer-Berlin, 1932.
- [21] N. Watanabe, "Efficiency of optical modulations with coherent states", Springer Lecture Notes in Physics, 378, pp. 350-360, Springer-Verlag, 1991.